

ORGANIZAÇÃO DE FAMÍLIAS DE TRAJETÓRIAS EM BILHARES FRACAMENTE ABERTOS

Marcia da Costa (Voluntária/UNICENTRO), Eduardo Vicentini (Orientador),
e-mail: evicentini@unicentro.br

Universidade Estadual do Centro-Oeste/Setor de Ciências Exatas
e da Terra

Palavras-chave: bilhar de Sinai, famílias de trajetórias, decaimento

Resumo:

Investigamos a formação de famílias de trajetórias em bilhares caóticos fracamente abertos. Utilizamos simulação computacional de um bilhar de Sinai com uma pequena abertura. Classificamos as trajetórias sobreviventes por uma de suas coordenadas do espaço de fase. Utilizamos uma abordagem estocástica, usando uma distribuição tipo gaussiana para as famílias de trajetórias, com um parâmetro de dispersão sigma. Resultados iniciais sobre o comportamento de sigma em função da geometria do bilhar também indicam uma estruturação em famílias das trajetórias sobreviventes.

Introdução

Bilhares são sistemas bidimensionais compostos de partículas que não interagem entre si, com massa e velocidade iguais a um, e descrevem trajetórias retas com mudanças em suas direções por reflexões especulares, quando encontram os limites do sistema. O bilhar de Sinai é um sistema cuja dinâmica é controlada pelo parâmetro geométrico (R/L).

Se $R/L = 0$, o sistema é integrável. Se $R/L > 0$, o sistema é completamente caótico [1], mas muda de não-hiperbólico para hiperbólico [2,3] quando $0.5 < R/L < 0.707$.

O bilhar de Sinai também pode ser considerado como uma célula unitária do gás periódico de Lorentz, com simetria quadrada. Quando a geometria permite a formação de corredores infinitos [4] entre os discos espalhadores, as trajetórias que sobrevivem por um longo tempo nesses corredores determinam a propriedade não-hiperbólica da dinâmica do bilhar. Trabalhos anteriores [2,5] sobre decaimento em um bilhar de Sinai mostram que a curva de decaimento é sensível à dinâmica interna.

Materiais e Métodos

Simulação Computacional.

Nós simulamos a dinâmica no bilhar de Sinai usando as condições de contorno especulares. Abrimos um pequeno orifício em uma das paredes do bilhar e observamos as partículas sobreviventes. Usamos 10^7 partículas, com condições iniciais randômicas para todo o espaço de fase.

Método Analítico

Usamos o método proposto na referencia [6], onde admitimos que as partículas podem se organizar em famílias de um parâmetro, escapando do bilhar de forma exponencial, com diferentes tempos característicos:

$$N = N_0 \int_0^1 e^{-\frac{t2x}{\tau_e}} g(x) dx \quad (1)$$

onde $0 \leq x \leq 1$ é uma variável randômica que classifica as famílias de trajetórias, $\tau_e/2x$ é o tempo característico de decaimento de cada família e

$$g_\sigma(x) = \frac{\exp\left[\frac{-(x-1/2)^2}{2\sigma^2}\right]}{\sqrt{2\pi}\sigma \operatorname{erf}\left[\frac{1}{2\sqrt{2}\sigma}\right]} \quad (2)$$

é a função densidade de probabilidade para a variável x , já normalizada para o intervalo (0,1) e σ é um parâmetro de dispersão. O parâmetro σ informa quão forte é a estruturação das famílias. Se:

- $\sigma \rightarrow 0$ então $g_\sigma(x) = \delta(x-1/2)$ e sistema não apresenta nenhuma formação de famílias.
- $\sigma \rightarrow \infty$ então $g_\sigma(x) = 1$ e todas as trajetórias podem ser classificadas em famílias.

O parâmetro σ foi determinado ajustando a forma assintótica da Eq.(1):

$$\frac{N}{N_0} = D_\sigma \text{ e } D_\sigma = \frac{\exp\left(\frac{-1}{8\sigma^2}\right)}{\sqrt{2\pi}\sigma \operatorname{erf}\left(\frac{1}{2\sqrt{2}\sigma}\right)} \text{ para } t \gg \tau_e \quad (3)$$

à parte algébrica da curva de decaimento.

Resultados e Discussão

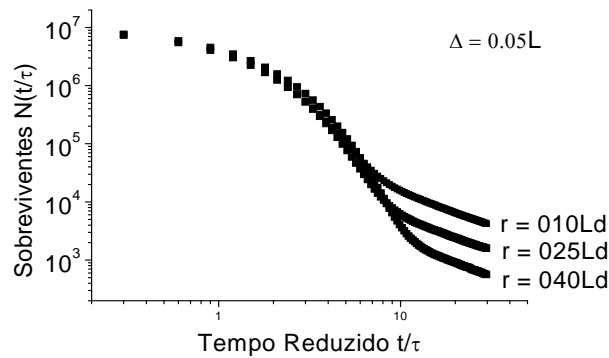


Fig. 1 – Numero de partículas sobreviventes no bilhar de Sinai aberto para três diferentes raios do disco espalhador. Com Δ fixo e igual a $0,05L$.

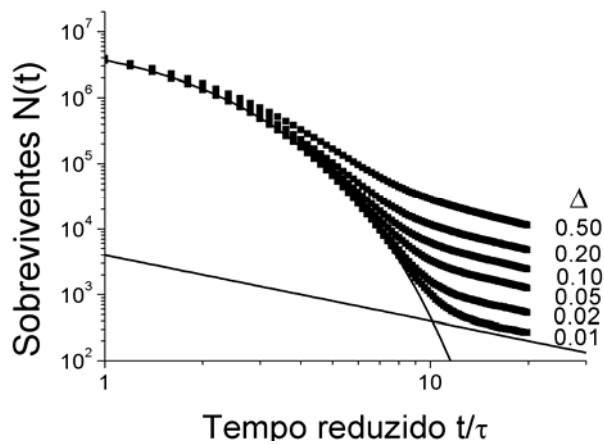


Fig.2 – Partículas sobreviventes no bilhar de Sinai aberto com diferentes tamanhos de abertura Δ . As linhas contínuas se referem ao decaimento exponencial puro e^{-t} e ao decaimento algébrico puro $(t/t)^{-1}$.

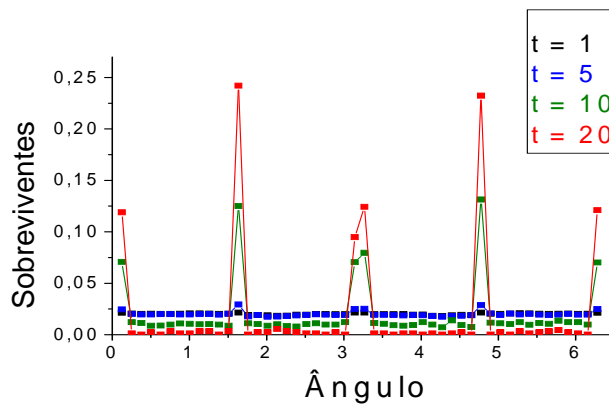


Fig. 3 – Partículas sobreviventes classificadas pelo ângulo (com o eixo x) em diferentes tempos. O raio do disco espalhador é $R = 0.4 L$, onde somente os corredores verticais e horizontais são permitidos.

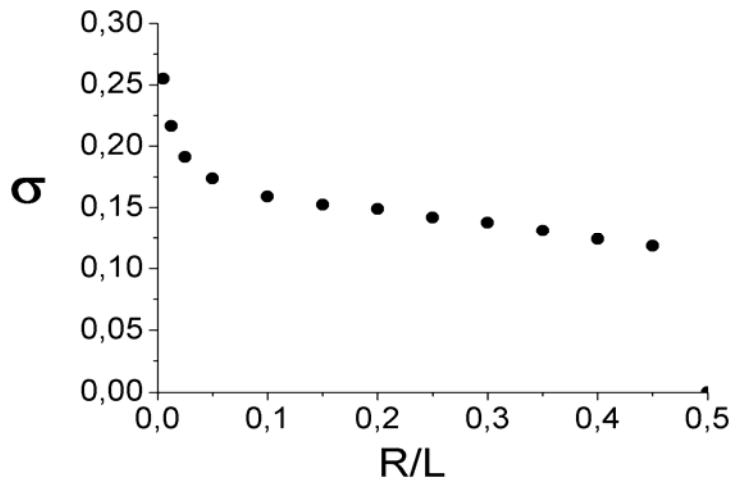


Fig. 4 – Parâmetro de dispersão σ da distribuição de famílias versus o parâmetro geométrico R/L . O valor de σ tende a zero quando $R/L = 0.45$.

Conclusões

O decaimento algébrico no bilhar de Sinai não-hiperbólico é sensível à geometria (R/L) e ao tamanho da abertura (Δ) (Fig. 1 e 2). Após o decaimento algébrico ser formado, as condições iniciais homogêneas são quebradas e famílias de trajetórias se formam, ligadas aos corredores infinitos (Fig. 3). O parâmetro de dispersão σ (Fig. 4) mostra que a dinâmica interna do sistema muda de completamente estruturada ($\sigma \rightarrow \infty$) para não estruturada ($\sigma \rightarrow 0$). O comportamento de σ para valores intermediários de R/L indica que o bilhar de Sinai não-hiperbólico é um sistema complexo.

Referências

1. Sinai, Y.G. *Russ. Math. Surveys* 1979, 25, 137.
2. Fendrik, A.J; Rivas, A.M.F; and Sánchez, M.J. (Decay of quasibounded classical Hamiltonian systems and their internal dynamics) *Phys. Rev.* 1994, 50, 1948.
3. Vicentini, E; Kokshenev, V.B. (On survival dynamics of classical systems. Non-chaotic open billiards) *Physica. A.* 295 (2001) 391.
4. Bleher. P.M; Stat, J. (Correlation decay and return time statistics) *Phys.* 1992, 66, 315.
5. Alt H; Gräf H.-D; Harney, H.L; Hofferbert, R; Rehfeld, H; Richter, A; Schardt P. (Fractal conductance fluctuations in generic chaotic cavities) *Phys. Rev.* 1996, 53, 2217.
6. Kokshenev ,V.B; Nemes, M.C. (Microscopic explanation of non-Debye relaxation for heat transfer) *Physica A* 2000, 275, 70.