



ANÁLISE DE COMPLEXIDADE EM UM BILHAR DE SINAI

Marcia da Costa (Voluntária-UNICENTRO), Eduardo Vicentini (Orientador),
e-mail: evicentini@unicentro.br

Universidade Estadual do Centro-Oeste/Departamento de
Física/Guarapuava, PR.

Setor de ciências exatas e da terra/Física

Palavras-chave: Bilhar de Sinai, decaimento, famílias de trajetórias.

Resumo:

Neste trabalho investigamos a formação de famílias de trajetórias e as formas de decaimento em bilhares fracamente abertos, bem como a influência da geometria do bilhar no comportamento do parâmetro de dispersão σ das trajetórias. Foram feitas simulações de um bilhar de Sinai fracamente aberto, com 10^7 partículas. Classificamos as trajetórias sobreviventes por uma de suas coordenadas do espaço de fase. Utilizamos uma abordagem estocástica, usando uma distribuição tipo gaussiana para as famílias de trajetórias, com o parâmetro de dispersão σ .

Introdução

Bilhares são sistemas bidimensionais compostos por partículas que não interagem entre si, com massa e velocidade iguais a um, com reflexões especulares com as fronteiras do sistema e que podem apresentar propriedades dinâmicas muito interessantes, como ergodicidade, *mixing* e caos [1]. São também bons modelos para sistemas reais, como para simular um gás de elétrons em uma superfície condutora ou o decaimento de partículas confinadas, como núcleons ou íons [2]. Os bilhares também são bons modelos para se discutir problemas ligados aos fundamentos da Física, como a relação entre dinâmica microscópica determinística e a descrição estocástica, que poderia explicar a origem dinâmica da irreversibilidade ou os mecanismos de relaxação para o equilíbrio termodinâmico [3].

Em trabalhos anteriores [4-5] demonstrou-se que a dinâmica de difusão e decaimento, em um bilhar de Sinai, é sensível à dinâmica interna, associada à geometria do bilhar. Dependendo da geometria apresentada o bilhar pode ser classificado como integrável ou caótico podendo ainda ser hiperbólico ou não-hiperbólico.

Materiais e métodos

Simulação Computacional

Nós simulamos a dinâmica no bilhar de Sinai usando as condições de contorno especulares. Abrimos um pequeno orifício em uma das paredes do bilhar e observamos as partículas sobreviventes. Usamos 10^7 partículas, com condições iniciais randômicas para todo o espaço de fase. Variamos os parâmetros, raio, tamanho do orifício, e tempo de observação.

Método Analítico

Usamos o método proposto na referencia [5], onde admitimos que as partículas podem se organizar em famílias de um parâmetro, escapando do bilhar de forma exponencial, com diferentes tempos característicos:

$$\frac{N(t)}{N_0} = \int_0^1 \exp\left(-\frac{t}{\tau_\sigma(x)}\right) g_\sigma(x) dx \quad (1)$$

onde $0 \leq x \leq 1$ é uma variável randômica que classifica as famílias de trajetórias, e

$$g_\sigma(x) = \frac{\exp\left[-\frac{(x-\frac{1}{2})^2}{2\sigma^2}\right]}{\sqrt{2\pi}\sigma \operatorname{erf}\left[\frac{1}{2\sqrt{2}\sigma}\right]} \quad (2)$$

é a função densidade de probabilidade para a variável x , já normalizada no intervalo $(0,1)$ e σ é o parâmetro de dispersão. Se:

- $\sigma \rightarrow 0$, então, $g_\sigma(x) = \delta(x - \frac{1}{2})$ e o sistema não apresenta formação de famílias.
- $\sigma \rightarrow \infty$, então, $g_\sigma(x) = 1$ e todas as trajetórias do sistema podem ser classificadas em famílias.

O parâmetro σ foi determinado ajustando a forma assintótica da eq.(1)

$$\frac{N}{N_0} = A_\sigma \frac{\tau}{t} \quad A_\sigma = \frac{e^{-\frac{1}{8\rho^2}}}{2\sqrt{2\pi}\sigma \operatorname{erf}\left[1/2\sqrt{2}\sigma\right]} \quad \text{para } t \gg \tau_e \quad (3)$$

à parte algébrica do decaimento.

Resultados e Discussão

Tabela 1. Dados obtidos através de simulações computacionais.

R/L	$A(\sigma) \times 10^3$	σ	R/L	$A(\sigma) \times 10^3$	σ
0,0	$5386,6 \pm 47,4$	∞	0,30	$19,3 \pm 0,2$	0,137
0,05	$108,6 \pm 0,7$	0,163	0,35	$15,9 \pm 0,1$	0,135
0,10	$54,9 \pm 0,4$	0,151	0,40	$13,1 \pm 0,1$	0,133
0,15	$39,0 \pm 0,3$	0,146	0,45	$12,4 \pm 0,1$	0,132
0,20	$29,2 \pm 0,2$	0,142	0,50	$10,5 \pm 0,1$	0,0
0,25	$23,0 \pm 0,1$	0,139	-	-	-

Dados referentes ao comportamento de sigma em relação ao raio.

Tabela 2. Resultados analíticos para o número de corredores.

p/q	Raio	N	p/q	Raio	N
0/1	0,5	1	2/5	0,0928	9
1/1	0,3535	2	3/5	0,0857	10

1/2	0,2236	3	4/5	0,0789	12
1/3	0,1581	4	1/6	0,0822	11
2/3	0,1387	5	5/6	0,0640	16
1/4	0,1213	6	1/7	0,0707	13
3/4	0,1	7	2/7	0,0687	14
1/5	0,0981	8	3/7	0,0657	15

N = Numero de corredores; tan $\theta = p/q$ classifica os corredores infinitos.

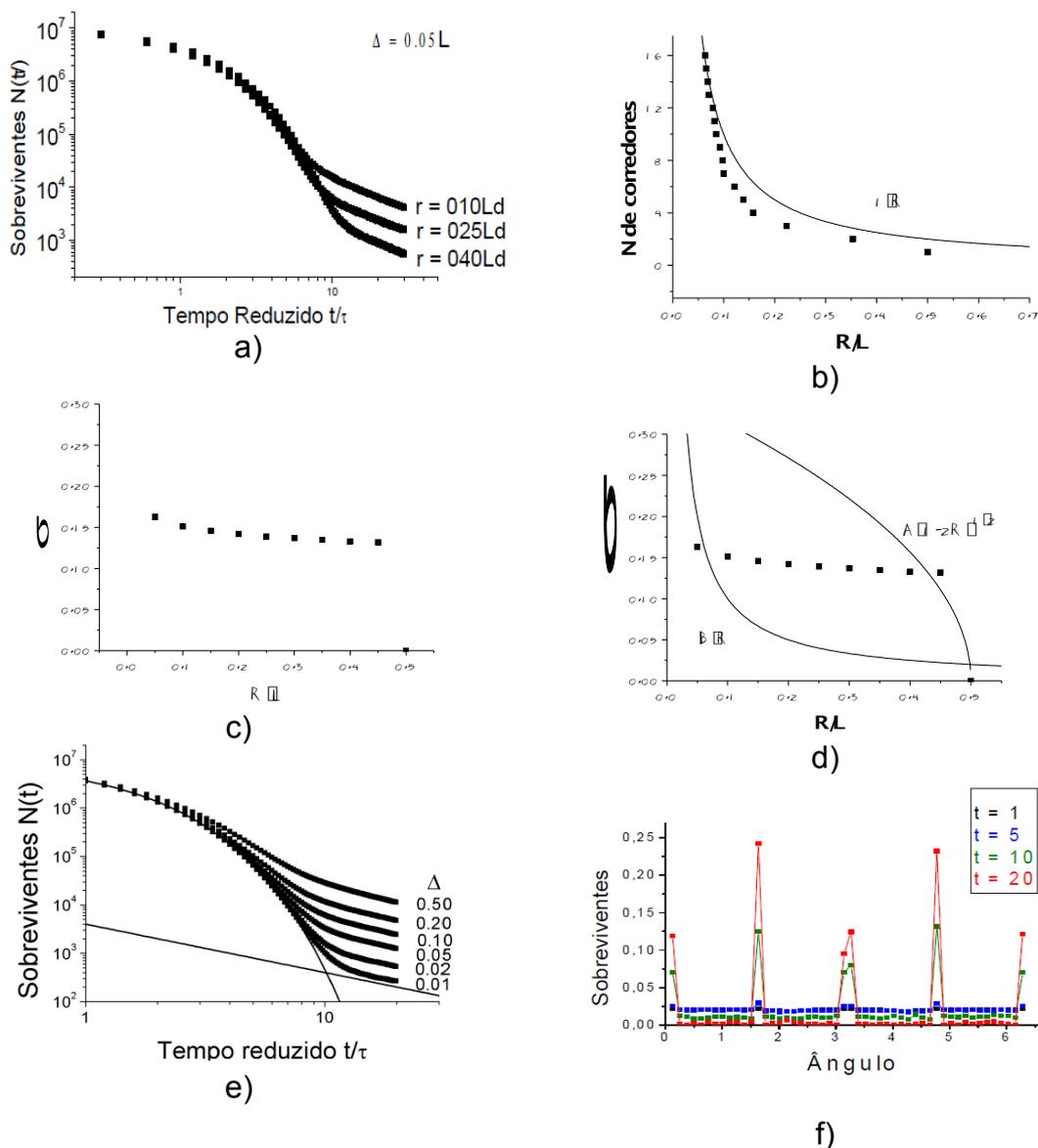


Figura1- a) Número de partículas sobreviventes no bilhar de Sinai (BS) aberto para três diferentes raios do disco espalhador. b) número de corredores em função do raio. c) comportamento de sigma com relação ao raio. d) comparação do comportamento de sigma e de duas outras funções $f(R)$. e) Partículas sobreviventes no BS aberto com diferentes tamanhos de abertura Δ . As linhas contínuas se referem ao decaimento exponencial puro $e^{-t/\tau}$ e ao decaimento algébrico puro $(t/\tau)^{-1}$. f) Partículas sobreviventes classificadas pelo ângulo (com o eixo x) em diferentes tempos. O raio do disco espalhador é $R = 0.4 L$.

Segundo os resultados, σ apresenta um comportamento universal para todos os valores de R enquanto o bilhar é completamente caótico e não-hiperbólico ($0 \leq R/L \leq 0,5$). No entanto, $\sigma = 0$ para $R/L \geq 0,5$ (hiperbólico) e $\sigma \rightarrow \infty$ para $R/L=0$ (integrável).

Uma análise inicial indica que σ tende à zero da mesma forma que a largura, no espaço de fase, do ultimo corredor do bilhar [4,6], ou seja, com:

$$\sigma \propto \ell_{\pi/2} = \sqrt{1 - 2R/L} \quad \text{para } R/L \rightarrow 0,5 \quad (4)$$

e que o aumento de sigma ocorre da mesma forma que o aumento do numero de corredores, a medida que $R/L \rightarrow 0$, ou seja:

$$\sigma \propto \frac{L}{R} \quad \text{para } \frac{R}{L} \rightarrow 0 \quad (5)$$

Conclusões

A dinâmica do bilhar de Sinai é sensível à geometria do bilhar (R/L) e ao tamanho do orifício (Fig. 1: a,b). O comportamento de sigma indica uma universalidade para todo valor de R no intervalo $0 \leq R/L \leq 0,5$, porém, $\sigma = 0$ para $R/L \geq 0,5$ e $\sigma \rightarrow \infty$ para $R/L=0$ (Fig.1: c). Assim, conclui-se que o parâmetro sigma está relacionado com as trajetórias que permanecem muito tempo nos corredores infinitos (Fig. 1: e). Se $\sigma = 0$, não ocorre a formação de famílias de trajetórias, por outro lado se $\sigma \rightarrow \infty$, todas as trajetórias podem ser classificadas em famílias. O orifício desempenha o papel de preservar as trajetórias dos corredores, retirando as que estão fora deles. Duas dinâmicas são distinguíveis: a do disco espalhador que destrói as famílias e a do orifício que preserva as famílias, indicando que o sistema tem comportamento complexo para valores intermediários de R/L .

Referências

1. GUTZWILLER, M.C. *Chaos in Classical and Quantum Mechanics*. New York, Springer-Verlag, 1990.
2. BAUER, W.; BERTSCH, G.F. Decay of Ordered and Chaotic Systems. *Physical Review Letters*. Vol. 65, Nº 18, 1990. p. 2213-16.
3. DORFMAN, J. R.; GASPARD, P. Chaotic scattering theory and reaction-rate coefficients. *Physical Review E*. Vol. 52, nº 1, 1995. p. 28-35.
4. KOKSHENEV, V. B; NEMES, M. C. Microscopic explanation of non-Debye relaxation for heat transfer. *Physica A* 2000, 275, 70.
5. KOKSHENEV, V. B. e VICENTINI, E. Wall-Collision Statistics in Classical Open and Closed Billiards Across Geometry. In: Progress in Statistical Mechanics Research. Cap. 3. *Nova Science*, 2008. p. 159-219 .
6. BLEHER, P. M. Statistical Properties of Two-Dimensional Periodic Lorentz Gas with Infinite Horizon. *Journal of Statistical Physics*, vol. 66, n. 1/2, 1992. p. 315-373.