CONDUÇÃO DE CALOR EM UM SISTEMA UNIDIMENSIONAL PELO MÉTODO DO CAMINHO RANDÔMICO DO TEMPO CONTÍNUO

Ederson Pauletti(PIBIC/Voluntária-UNICENTRO), Pedro Pablo González-Borrero e Eduardo Vicentini(orientador)
email:ederpauletti@hotmail.com

Universidade Estadual do Centro – Oeste/Setor de Ciências Exatas

Palavras-chaves: Condução de calor, caminho randômico, condutividade térmica

Resumo

Neste trabalho analisamos a propagação de calor em um sistema unidimensional pelo método do caminho randômico de tempo contínuo (CRTC), com o objetivo de relacionar as grandezas que caracterizam termicamente o meio, como condutividade térmica, com as grandezas microscópicas, livre caminho médio e tempo médio entre colisões. Estas últimas estão relacionadas, principalmente, ao movimento dos fônons em semicondutores ou dos elétrons de condução em condutores. Nossos resultados mostram a distribuição de temperaturas no regime transiente e a difusão normal.

Introdução

O método do caminho randômico de tempo contínuo (CRTC) usa as seguintes probabilidades [1]:
$w(x,t)dx\,dt$ – posição do caminhante em uma posição entre x e $x+dx$ em um tempo entre t e $t+dt$ (probabilidade de localização).
$\psi(x,t)dx\,dt$ – comprimento de um pulo do caminhante entre uma posição x e $x+dx$ em um tempo entre t e $t+dt$ (probabilidade de comprimento de pulo).
$\lambda(x)=\int \psi(x,t)dt$ - probabilidade de comprimento de pulo entre x e $x+dx$ em certo tempo (probabilidade de comprimento de pulo).
$\psi(t)=\int \psi(x,t)dx$ - probabilidade de tempo de espera entre um tempo t e $t+dt$ em um pulo de certo comprimento (probabilidade de tempo de espera).

Estas probabilidades estão relacionadas por:

$$W(k,u)=\frac{1-\psi(u)}{u}\frac{1}{1-\psi(k,u)} \tag{1}$$

Em que as letras maiúsculas representam as transformadas de Fourier-Laplace equivalentes às letras minúsculas que representam as probabilidades.

A distribuição de temperatura em um meio material é dependente da densidade de probabilidade $w(x,t)$.
A condutividade térmica está relacionado com outros parâmetros por[2]:

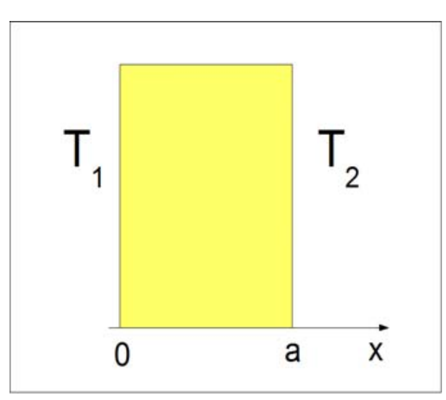
$$k=C\alpha \tag{2}$$

Em que *C* é a capacidade térmica por unidade de volume e α é a difusividade térmica. α é também o coeficiente de difusão do caminhante randômico determinado por [3]:

$$\langle x^2\rangle=\int x^2 w(x,t)dx=2\alpha t \tag{3}$$

para o caso unidimensional.

Materiais e Métodos



Nós consideramos o problema de duas superfícies planas com temperaturas constantes T_1 e T_2, sendo $T_1>T_2$, nas posições $x=0$ e $x=a$, respectivamente, com o meio material (condutor ou semicondutor) ligando ambas. As superfícies estão em contato com dois reservatórios de calor que mantém as temperaturas constantes. Desta maneira a temperatura na posição x, em um tempo t, é determinada por:

$$T(x,t)=T_0-(T_1-T_2)\int w(x',t)dx' \tag{4}$$

Nós usamos uma probabilidade de pulo desacoplada, $\psi(x,t)=\lambda(x)\psi(t)$, e para as probabilidades comprimento de pulo e tempo de espera foi suposto as seguintes funções:

$$\lambda(x)=\frac{\exp\left(\frac{-x^2}{2\sigma^2}\right)}{\sqrt{2\pi}\,\sigma\, erf\left(\frac{a}{\sqrt{2}\sigma}\right)} \tag{5}$$

$$\psi(t) = \frac{e^{-t/\tau}}{\tau} \tag{6}$$

Na Eq. (5) nós usamos uma função Gaussiana normalizada para o comprimento de pulo no intervalo $[-a, a]$ em que a é o comprimento do meio material e σ é o parâmetro de dispersão. Na Eq.(6) nós usamos um decaimento exponencial para o tempo de espera, sendo τ seu valor médio.

Foi usado as transformadas apropriadas de Fourier-Laplace na Eq.(5) e Eq.(6) e foi assumido as seguintes aproximações $a \gg \sigma$ e $x \gg \sigma$. Os resultados são:

$$W(k,u) \approx \frac{1}{u + \frac{k^2\sigma^2}{2\tau}} \qquad\qquad w(x,t) = \frac{\exp\left(-\frac{x^2\tau}{2\sigma^2 t}\right)}{\sqrt{\frac{\pi\sigma^2 t}{2\tau}}\, erf\left(\frac{a}{\sigma}\sqrt{\frac{\tau}{2t}}\right)} \tag{7}$$

Resultados

A distribuição de temperatura torna-se:

$$T(x,t) = T_1 - (T_1 - T_2)\frac{erf\left(\frac{x}{\sigma\sqrt{2t/\tau}}\right)}{erf\left(\frac{a}{\sigma\sqrt{2t/\tau}}\right)} \tag{8}$$

Na Eq.(7) a probabilidade de localização já está normalizada no intervalo $[0, a]$. A Eq.(8) mostra a distribuição de temperatura no meio material. Para grandes intervalos de tempo a distribuição de temperatura se estabiliza e torna-se:

$$T(x,t) = T_1 - (T_1 - T_2)\frac{x}{a} \quad with \quad \frac{t}{\tau} \gg \frac{a^2}{2\sigma^2} \tag{9}$$

Interpretação dos parâmetros característicos σ e τ:

- σ é a trajetória livre média dos elétrons ou fônons no meio material, já que:

$$\langle x^2 \rangle = \int_{-a}^{a} x^2 \lambda(x)\, dx \approx \sigma^2 \quad \text{com} \quad a \gg \sigma \tag{10}$$

- τ é o tempo livre médio para elétrons de condução ou tempo de relação para fônons.
- σ/τ é a velocidade média e pode ser interpretada como a componente do valor quadrático médio da velocidade do caminhante randômico. Mais precisamente, $v_x^2 = \sigma^2/2\tau^2$ e $v^2 = 3v_x^2$, em que v é a velocidade do som no meio material.

A difusividade térmica α pode ser determinada pela variação de $w(x,t)$ na Eq.(7), para o regime transiente [3] a condutividade térmica esta relacionada com α por:

$$\langle x^2 \rangle = \int_{o}^{a} x^2 w(x,t)\, dx \approx \frac{\sigma^2}{\tau} t \qquad\qquad k = \alpha C \tag{11}$$

em que C = ρc é a capacidade de calor específico (c é o calor específico). Assim, temos:

$$k = \frac{\sigma^2 C}{2\tau} = v_x^2 \tau C = \frac{v \lambda C}{3} \tag{12}$$

em que λ é a trajetória livre média em três dimensões.

Conclusões

Nós desenvolvemos a análise da condução de calor em um sistema unidimensional, usando o método do caminho randômico de tempo contínuo. Foi usado usado um decaimento exponencial para a densidade de probabilidade do tempo de espera e uma função Gaussiana para a densidade de probabilidade de comprimento de pulo. Nosso resultado são os mesmos encontrados para sistemas em que as dimensões do sistema é muito maior do que a trajetória livre média. Nós esperamos com nosso método sermos capazes de investigar problemas de condução de calor em sistemas com pequenos comprimentos, como por exemplo, filmes finos e nanofluidos.

Referências

1. Metzler, R.; Klafter, J. (The random walk's guide. to anomalous diffusion: a fractional dynamics approach) *Phys. Reports* 2000, 339, 1.
2. Marin, E (The role of thermal properties in periodical time varying phenomena) *J. Phys.* 2007, 28, 429.
3. Pathria, R.K (Statistical Mechanics), Ed:Paris Pergamon Press, New York, 1972. Vol.1